Minimierung

Digitaltechnik

Wolfgang Neff

Minimierung (1)

- Wahrheitsfunktionen sind oft sehr groß
- Durch Minimierung werden sie vereinfacht
- Es gibt mehrere Methoden
  - KV-Diagramm (Karnaugh-Veitch, [ˈkɑːɹnɔː]-[viːtʃ])
    - Sehr anschaulich
    - Funktionier nur bis vier Variablen gut
  - Quine-McCluskey-Verfahren
    - Für beliebige Anzahl von Variablen geeignet
    - Komplex und wenig anschaulich

Minimierung (2)

- Vorgehensweise
  - Bestimmung der Wahrheitstabelle
  - Erstellen des KV-Diagramm
  - Einfüllen der Karnaugh-Terme
  - Suchen von Blöcken mit der Größe von Zweier-potenzen (2er-, 4er-, 8er-, ...-Blöcke)
  - Steichen der Variablen, die in zwei Bereichen liegen

Wahrheitstabellen (1)

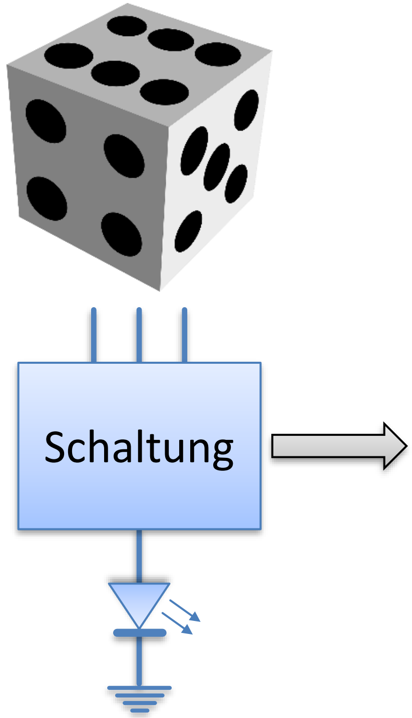
- Bestimmung der Wahrheitstabelle
  - Analysiere das Problem
  - Bestimme die Anzahl der möglichen Ereignisse
  - Bestimme die beste Zweierpotenz dafür
  - Erzeugt die entsprechende Wahrheitstabelle
  - Codiere die Ereignisse
  - Bestimme das Ergebnis für jede Zeile der Tabelle
  - Meist gibt es mehrere Möglichkeiten

Wahrheitstabellen (2)

- Beispiel: Gerade Augenzahl gewürfelt?
  - Ein Würfel hat sechs Seiten
    - Es gibt 6 mögliche Ereignisse
  - 3 ist die hierfür geeignete Zweierpotenz
    - Es werden 3 Parameter benötigt ($2^2 = 4 \leq 6 \leq 2^3 = 8$)
    - Die Schaltung hat 3 Eingänge
  - Codierung der Ereignisse
    - 1 Auge → 1, 2 Augen → 2 etc.
  - Eine 1 zeigt eine gerade Augenzahl an

Wahrheitstabellen (3)

- Beispiel: Gerade Augen? (Fortsetzung)



n	a	b	c	ϕ(a,b,c)	Augen
0	0	0	0	X	-
1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	1	2
3	0	1	1	0	3
4	1	0	0	1	4
5	1	0	1	0	5
6	1	1	0	1	6
7	1	1	1	X	-

KV-Diagramme (1)

- Zwei Variablen

	a	
$\neg a \wedge \neg b$	$a \wedge \neg b$	
$\neg a \wedge b$	$a \wedge b$	b

- Drei Variablen

		a	a	
$\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c$	$\neg a \wedge \neg b \wedge c$	$a \wedge \neg b \wedge c$	$a \wedge \neg b \wedge \neg c$	
$\neg a \wedge b \wedge \neg c$	$\neg a \wedge b \wedge c$	$a \wedge b \wedge c$	$a \wedge b \wedge \neg c$	b
	c	c		

KV-Diagramme (2)

- Vier Variablen

			a		
	¬a∧¬b∧¬c∧¬d	¬a∧¬b∧c∧¬d	a∧¬b∧c∧¬d	a∧¬b∧¬c∧¬d	
d	¬a∧¬b∧¬c∧d	¬a∧¬b∧c∧d	a∧¬b∧c∧d	a∧¬b∧¬c∧d	
	¬a∧b∧¬c∧d	¬a∧b∧c∧d	a∧b∧c∧d	a∧b∧¬c∧d	b
	¬a∧b∧¬c∧¬d	¬a∧b∧c∧¬d	a∧b∧c∧¬d	a∧b∧¬c∧¬d	
		c			

KV-Terme (1)

- Minterme
  - Zeilen mit einer 1 als Ergebnis
  - Alle Variablen werden durch AND verbunden
    - Jede Variable, die einen Wert von 0 hat, wird negiert
  - Markiere die Minterme im Diagramm mit einer 1
- Don‘t-Care-Terme
  - Zeilen mit einem X als Ergebnis
  - Markiere diese Terme im Diagramm mit einem X

KV-Terme (2)

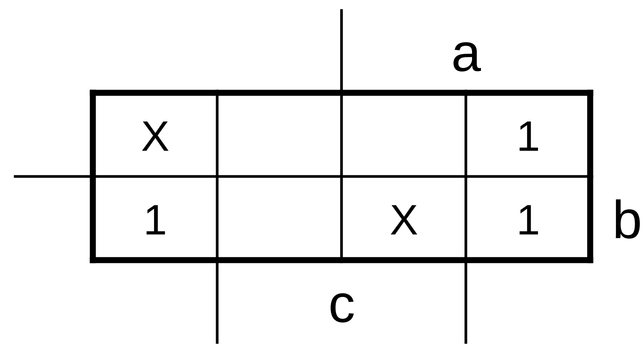
- Bestimmung der Terme
  - Beispiel: Gerade Augen?

n	a	b	c	ϕ(a,b,c)	
0	0	0	0	X	x_0
1	0	0	1	0	
2	0	1	0	1	m_0
3	0	1	1	0	
4	1	0	0	1	m_1
5	1	0	1	0	
6	1	1	0	1	m_2
7	1	1	1	X	x_1

  - Minterme
    - $m_0 = \neg a \wedge b \wedge \neg c$
    - $m_1 = a \wedge \neg b \wedge \neg c$
    - $m_2 = a \wedge b \wedge \neg c$
  - Don't-Care-Terme
    - $x_0 = \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c$
    - $x_1 = a \wedge b \wedge c$

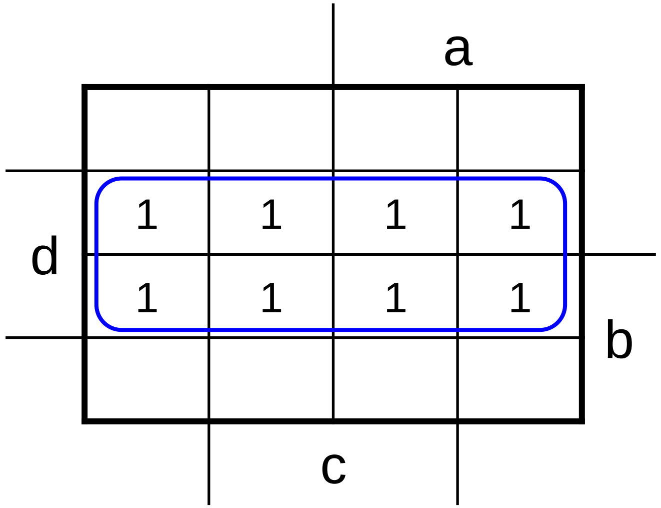
KV-Terme (3)

- Eintragung der Terme
  - Beispiel: Gerade Augen?
    - Minterme
      - $m_0 = \neg a \wedge b \wedge \neg c$
      - $m_1 = a \wedge \neg b \wedge \neg c$
      - $m_2 = a \wedge b \wedge \neg c$
    - Don’t-Care-Terme
      - $x_0 = \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c$
      - $x_1 = a \wedge b \wedge c$



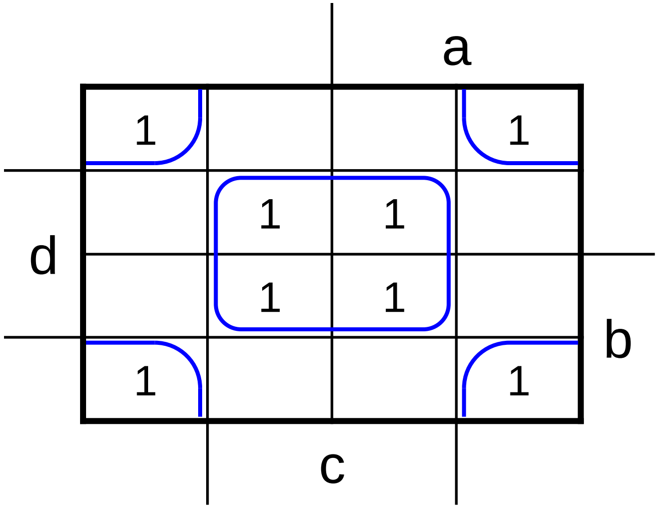
Minimierung (3)

- Bestimmung der Blöcke
  - Einfache Blöcke
    - Minterme
      $(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge d)$, $(\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge d)$, $(a \wedge \neg b \wedge c \wedge d)$, $(a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge d)$, $(\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge d)$, $(\neg a \wedge b \wedge c \wedge d)$, $(a \wedge b \wedge c \wedge d)$, $(a \wedge b \wedge \neg c \wedge d)$
    - Minimierte Funktion
      $\phi(a,b,c,d) = d$



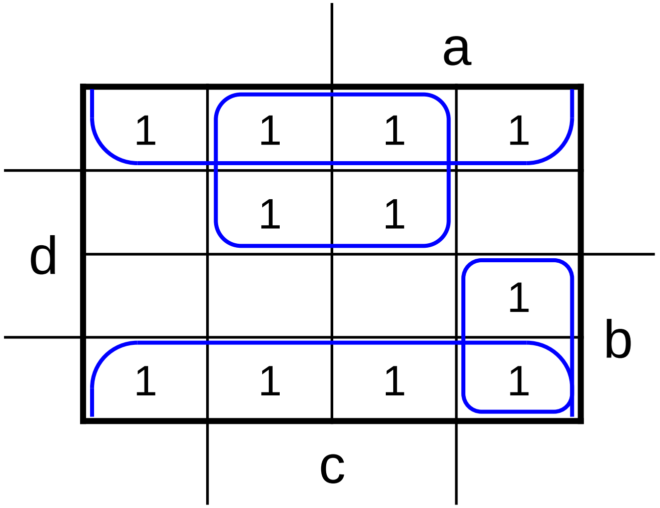
Minimierung (4)

- Bestimmung der Blöcke (Fortsetzung)
  - Blöcke mit Randterme
    - Minterme
      $(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d)$, $(a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d)$, $(\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge d)$, $(a \wedge \neg b \wedge c \wedge d)$, $(\neg a \wedge b \wedge c \wedge d)$, $(a \wedge b \wedge c \wedge d)$, $(\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d)$, $(a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d)$
    - Minimierte Funktion
      $\phi(a,b,c,d) = (c \wedge d) \vee (\neg c \wedge \neg d)$



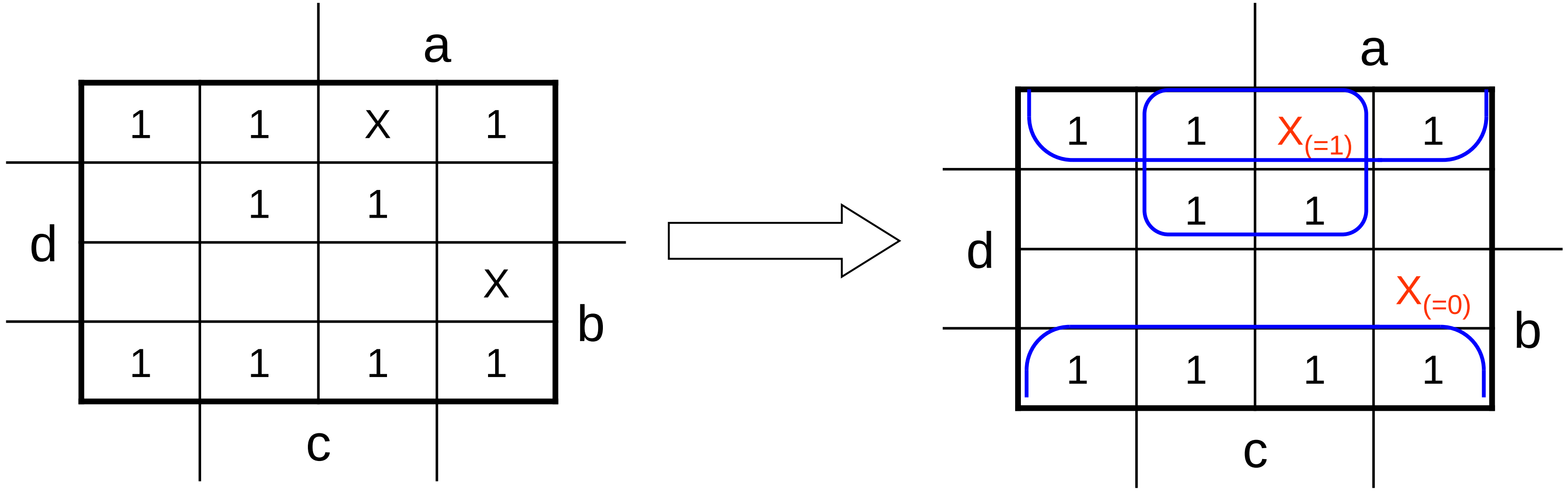
Minimierung (5)

- Bestimmung der Blöcke (Fortsetzung)
  - Blöcke mit Term-Recycling
    - Minterme
      $(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d)$, $(\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d)$, $(a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d)$, $(a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d)$, $(\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge d)$, $(a \wedge \neg b \wedge c \wedge d)$, $(a \wedge b \wedge \neg c \wedge d)$, $(\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d)$, $(\neg a \wedge b \wedge c \wedge \neg d)$, $(a \wedge b \wedge c \wedge \neg d)$, $(a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d)$
    - Minimierte Funktion
      $\phi(a,b,c,d) = \neg d \vee (\neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$



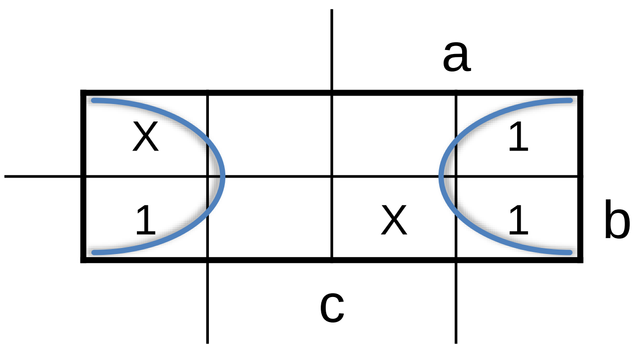
Minimierung (6)

- Bestimmung der Blöcke (Fortsetzung)
  – Don't-Care-Terme
    - Sind bei geschickter Wahl äußerst hilfreich
    - Sie erlauben es, die Minimierung zu optimieren



Minimierung (7)

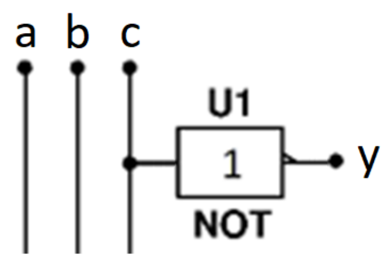
- Bestimmung der Blöcke (Fortsetzung)
  - Beispiel: Gerade Augen?



- Schaltfunktion

  $\phi(a,b,c) = \neg c$

- Schaltung



(wird noch behandelt)