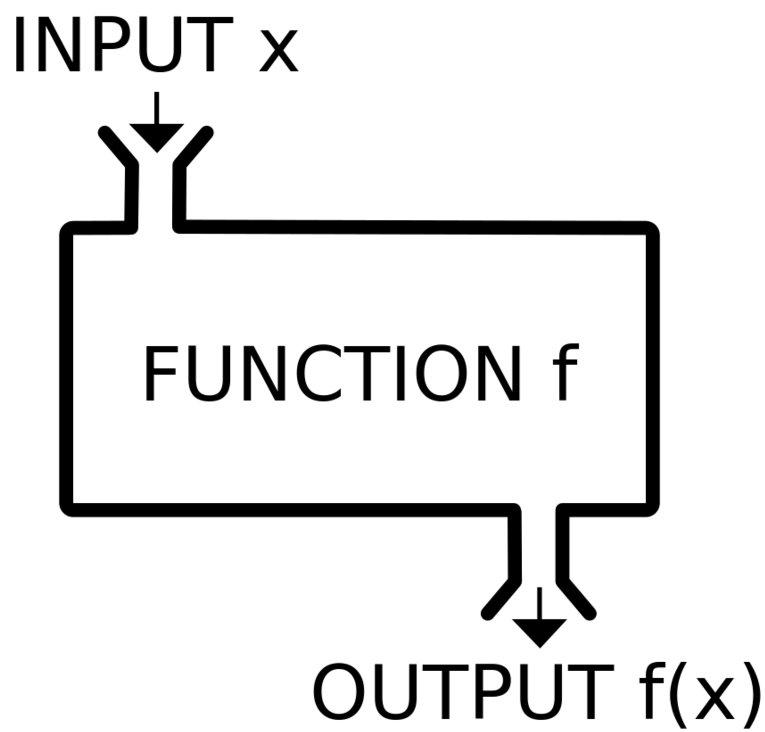
Wahrheitstabellen

Digitaltechnik

Wolfgang Neff

Wahrheitstabellen (1)

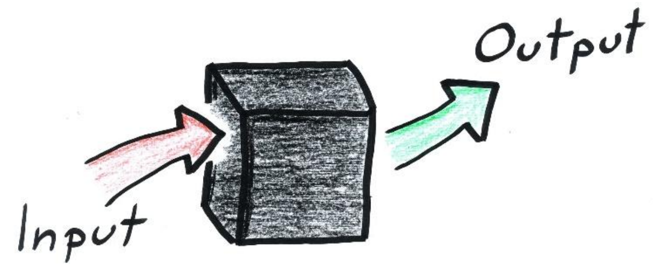
- Funktionen
  - Verarbeiten Input
  - Produzieren Output
  - Sie haben
    - Parameter
      - Input
  - Sie geben zurück
    - Ergebnisse
      - Output



Wahrheitstabellen (2)

- Wahrheitsfunktionen
  - Sind Ausdrücke aus
    - Parameter (a, b, c, …)
    - Operatoren (¬, ∧, ∨, …)
    - Funktionen (φ, ψ, χ, …)
  - Weitere Bezeichnungen
    - Schaltfunktion
    - Logische Funktion
    - Boolesche Function

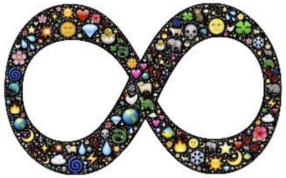
$$\underbrace{\phi(a,b)}_{\text{Parameter}} = \underbrace{a \wedge b}_{\text{Ausdruck}}$$



0, 1	φ(a,b)	0
Argumente	Funktion	Ergebnis

Wahrheitstabellen (3)

- Wahrheitsfunktionen (Fortsetzung)
  - Unterscheiden sich von Arithmetische Funktionen
    - Arithmetische Funktionen sind unendlich
    - Wahrheitsfunktionen sind endlich



$f(1,1) = 2$
$f(1,2) = 3$
$f(1,3) = 4$
$f(1,4) = 5$
…
Es ist kein Ende in Sicht

Arithmetische Funktion $f(x,y) = x+y$

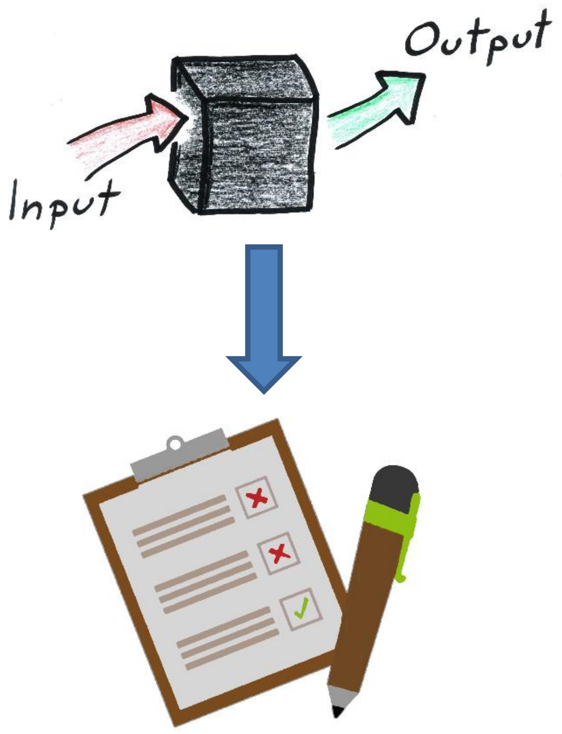
$\varphi(0,0) = 0$
$\varphi(0,1) = 0$
$\varphi(1,0) = 0$
$\varphi(1,1) = 1$

Argumente komplett

Wahrheitsfunktion $\varphi(a,b) = a \wedge b$

Wahrheitstabellen (4)

- Wahrheitsfunktionen (Fortsetzung)
  - Tabellen können erstellt werden
    - Alle mögliche Inputs (Argumente)
    - Alle mögliche Outputs (Ergebnisse)
  - Bezeichnungen
    - Wahrheitstabelle
    - Schalttabelle
    - Zustandstabelle



Wahrheitstabellen (5)

- Wahrheitsfunktionen (Fortsetzung)
  - Beispiel
    - $\phi(a,b) = a \wedge b$
  - Beschreibung
    - Zwei Parameter
      - a, b
    - Vier Argumente
      - (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)
    - Ein Ergebnis
      - 0 oder 1

a	b	$\phi(a,b)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Wahrheitstabellen (6)

- Beispiele
  - Funktionen mit einem Parameter: ϕ(a)
  - Funktionen mit zwei Parameter: ϕ(a,b)

a	ϕ(a)
0	…
1	…

a	b	ϕ(a,b)
0	0	…
0	1	…
1	0	…
1	1	…

Wahrheitstabellen (7)

- Erstellung
  - Anzahl der Spalten
    - Anzahl der Parameter: n
      - Plus eventuelle Hilfsspalten und eine Ergebnisspalte
  - Anzahl der Zeilen
    - Anzahl der Argumente: 2^n
  - Erste Spalte
    - Halbe-Halbe: ½ Spalte 0, ½ Spalte 1

Wahrheitstabellen (8)

- Erstellung (Fortsetzung)
  - Zweite Spalte
    - Halbe-halbe aber doppelt so schnell: ¼ *0*, ¼ *1*, ¼ *0*, ¼ *1*
  - Und so weiter …
  - Checklist
    - Erste Zeile startet mit: 0 0 0 0 …
    - Letzte Zeile endet mit : 1 1 1 1 …
    - Letzte Spalte wechselt ständig*:* 0 1 0 1 0 1 …
    - Folge der Zeile: Natürliche Zahlen (0 1 2 3 …) in binär

Wahrheitstabellen (9)

- Funktion mit vier Parameter: $\phi(a,b,c,d)$

a	b	c	d
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1

Fortsetzung rechts

a	b	c	d
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Wahrheitstabellen (10)

- Logische Äquivalenz
  - Wahrheitstabellen sind gleich
  - $\phi \leftrightarrow \psi$

a	b	ϕ(a,b)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

a	b	ψ(a,b)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Wahrheitstabellen (11)

- Berechnung (erste Methode)
  - Mathematikermethode
  - Termweise
    - Terme: bilden den Ausdruck einer Funktion
    - Funktion: spannen einen Baum aus Termen auf

$$\phi(a,b,c) = \underbrace{\underbrace{\neg a}_{\text{1. Term}} \wedge \underbrace{(b \vee c)}_{\text{2. Term}}}_{\text{3. Term}}$$

$\phi(a,b,c) = \neg a \wedge (b \vee c)$

$\neg a$ $\qquad$ $b \vee c$

Das Ziel ist ein
Operator pro Term

Wahrheitstabellen (12)

- Berechnung (erste Methode, Fortsetzung)
  - Beispiel: $\phi(a,b,c) = (\boxed{(\neg a \wedge b) \vee b}) \vee (\boxed{\neg a \wedge \neg c})$

3 $(\boxed{\neg a \wedge b}) \vee b$

2 $\boxed{\neg a} \wedge b$

1 $\neg a$

5 $\boxed{\neg a} \wedge \boxed{\neg c}$

1 $\neg a$ 4 $\neg c$

1 Term 1 $= \neg a$
2 Term 2 $=$ 1 $\wedge b$
3 Term 3 $=$ 2 $\vee b$
4 Term 4 $= \neg c$
5 Term 5 $=$ 1 $\wedge$ 4
$\phi(a,b,c) =$ 3 $\vee$ 5

Achtung: Nur **ein** Operator pro Term!

Wahrheitstabellen (13)

- Berechnung (erste Methode, Fortsetzung)
  - Beispiel: $\phi(a,b,c) = ((\neg a \wedge b) \vee b) \vee (\neg a \wedge \neg c)$

			①	②	③	④	⑤	$\phi(a,b,c)$
a	b	c	$\neg a$	①$\wedge$b	②$\vee$b	$\neg c$	①$\wedge$④	③$\vee$⑤
0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1

Wahrheitstabellen (14)

- Berechnung (zweite Methode)
  - Philosophenmethode
    - Jedes Symbol in eine Spalte
    - Füge die Argumente ein
    - Führe die Operationen aus
      - Fülle die Spalte mit den Ergebnissen
      - Die zuletzt berechnete Spalte zeigt das Ergebnis der Funktion.

a	b	a	∧	b
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Wahrheitstabellen (15)

- Berechnung (zweite Methode, Fortsetzung)
  - Beispiel: $\phi(a,b,c) = ((\neg a \wedge b) \vee b) \vee (\neg a \wedge \neg c)$

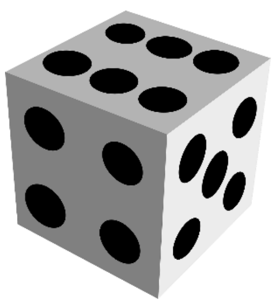
Abfolge					2	1	4	3		6	5		12		8	7	11	10	9	
a	b	c	(	(	$\neg$	a	$\wedge$	b	)	$\vee$	b	)	$\vee$	(	$\neg$	a	$\wedge$	$\neg$	c	)
0	0	0			1	0	0	0		0	0		1		1	0	1	1	0	
0	0	1			1	0	0	0		0	0		0		1	0	0	0	1	
0	1	0			1	0	1	1		1	1		1		1	0	1	1	0	
0	1	1			1	0	1	1		1	1		1		1	0	0	0	1	
1	0	0			0	1	0	0		0	0		0		0	1	0	1	0	
1	0	1			0	1	0	0		0	0		0		0	1	0	0	1	
1	1	0			0	1	0	1		1	1		1		0	1	0	1	0	
1	1	1			0	1	0	1		1	1		1		0	1	0	0	1	

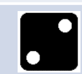
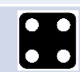
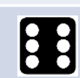
Wahrheitstabellen (16)

- Don’t-Care-Werte
  - Wahrheitstabellen können unvollständig sein
  - Ihre Länge ist aber vorgegeben: 2^n
  - Unbenützte Zeilen erhalten Don’t-Care-Einträge
  - Sie dürfen nicht einfach weg gelassen werden
  - Sie werden durch ein X markiert

Wahrheitstabellen (17)

- Don’t-Care-Werte (Fortsetzung)
  - Beispiel: Welche Seite des Würfels hat 6 Augen?



n	a	b	c	ϕ(a,b,c)	Seite
0	0	0	0	X	ungültig
1	0	0	1	0	
2	0	1	0	0	
3	0	1	1	0	
4	1	0	0	0	
5	1	0	1	0	
6	1	1	0	1	
7	1	1	1	X	ungültig

Wahrheitstabellen (18)

- Zusammenfassung
  - Wahrheitstabellen beschreiben log. Funktionen
    - Eine Funktion hat genau eine Wahrheitstabelle
  - Wahrheitstabellen sind nicht eindeutig
    - Viele Funktionen haben dieselbe Wahrheitstabelle
    - All diese Funktionen sind logisch äquivalent
  - Einige dieser Funktionen findet man sehr leicht
    - Wahrheitstabelle → Wahrheitsfunktion -> Schaltung