

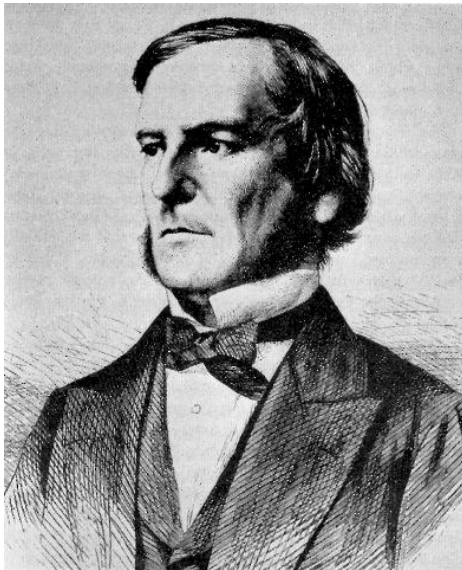
Logische Operatoren

Digitaltechnik

Wolfgang Neff

Boolesche Algebra (1)

- George Boole
 - Britischer Mathematiker und Philosoph
 - Mathematische Grundlagen der Informatik



- * 2. Nov. 1815 in England
- † 8. Dez. 1864 in Irland

Boolesche Algebra (2)

- Rechnen mit der Wahrheit

- Wahr (*true*) $\rightarrow 1$

- Falsch (*false*) $\rightarrow 0$

Etwas, was wahr und falsch sein kann.
Rechnen mit der Wahrheit ist schwer.

$$1+1 = 2$$

$$0-1 = -1$$

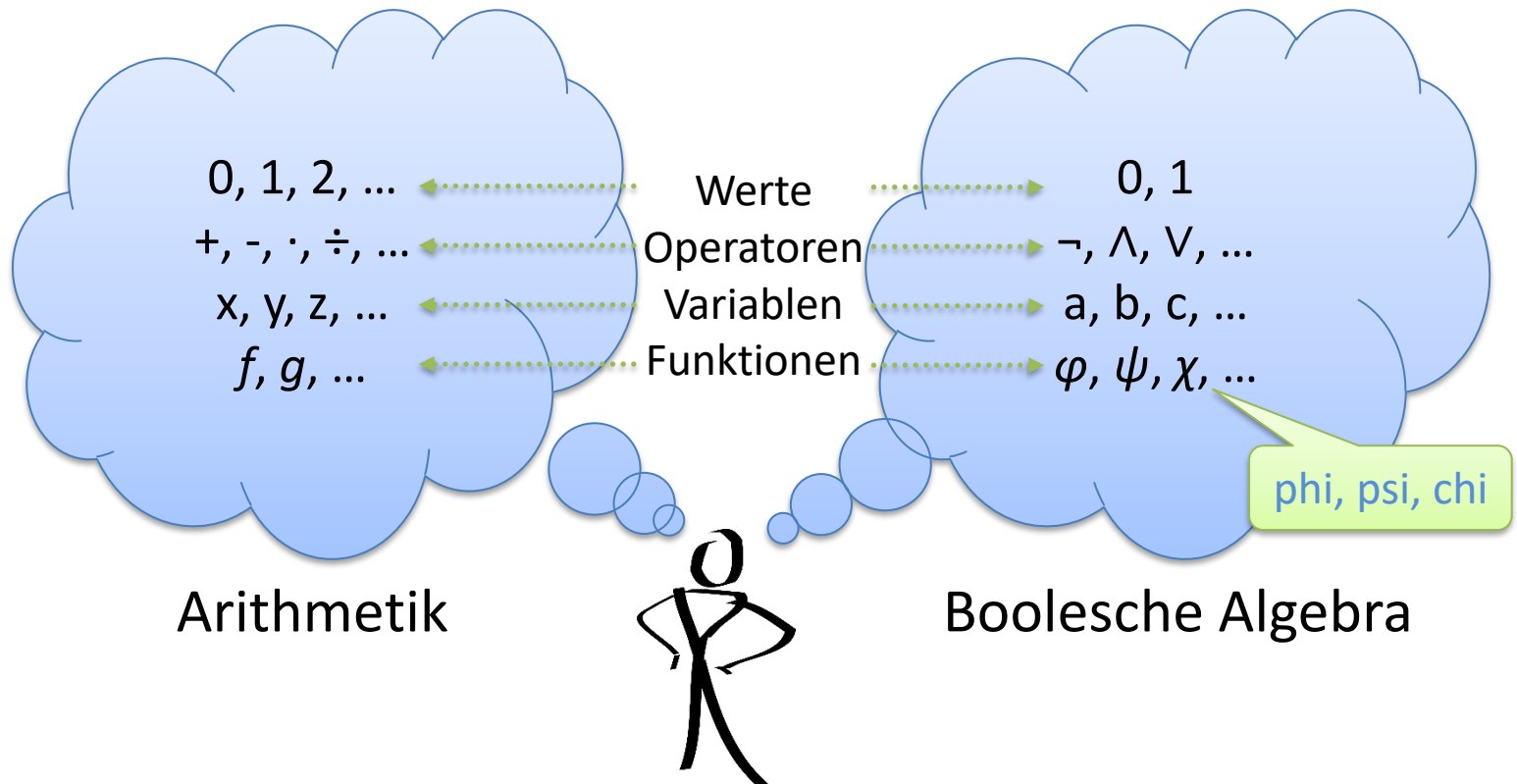
$$1 \div 0 = \perp$$



Eine neue Art
von Mathematik
wird nötig!

Boolesche Algebra (3)

- Eine neue Art von Mathematik



Logische Operatoren (1)

- Arbeiten mit logischen Werten
 - Wahr/Falsch, True/False, An/Aus, High/Low, 1/0
- Alternative Ausdrücke
 - Logischer Operator
 - Logische Verknüpfung
 - Boolescher Operator
 - Logischer Wert
 - Wahrheitswert
 - Boolescher Wert



Logische Operatoren (2)

- Negation

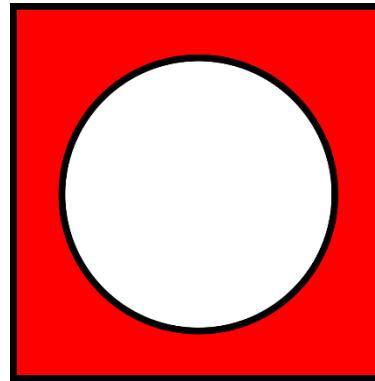
- Symbol: \neg (NICHT, NOT, manchmal $\neg A \rightarrow \bar{A}$)

- Bedeutung: Logisches Nicht (Gegenteil von ...)

- Definition:

- | a | $\neg a$ |
|---|----------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Wahrheitstabelle



Venn-Diagramm

Logische Operatoren (3)

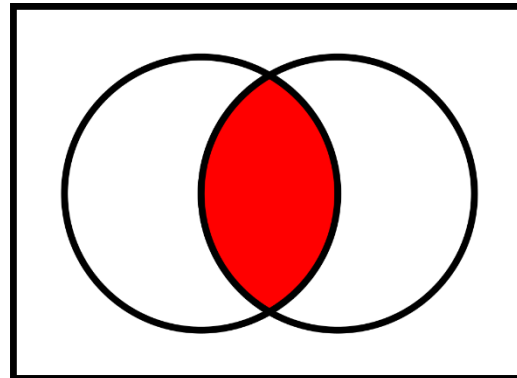
- Konjunktion

- Symbol: \wedge (UND, AND)

- Bedeutung: Logisches Und (beide sind wahr)

- Definition:

- | a | b | $a \wedge b$ |
|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |



Logische Operatoren (4)

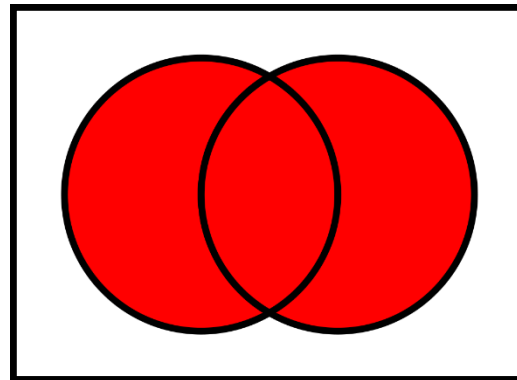
- Disjunktion

- Symbol: \vee (ODER, OR)

- Bedeutung: Logisches Oder (mindestens eines ist wahr)

- Definition:

- | a | b | $a \vee b$ |
|---|---|------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |



Logische Operatoren (5)

- Antivalenz

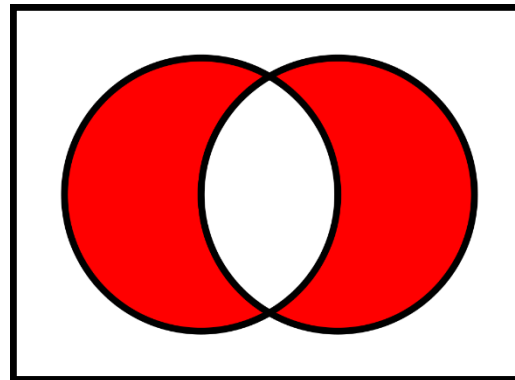
- Symbol: \oplus (XOR, auch \leftrightarrow oder $\underline{\vee}$)

Nicht äquivalent
(nicht gleich)

- Bedeutung: Exklusives Oder (eines aber nicht beide ...)

- Definition:

- | a | b | $a \oplus b$ |
|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |



Logische Operatoren (6)

- Exklusion (Sheffer-Strich)

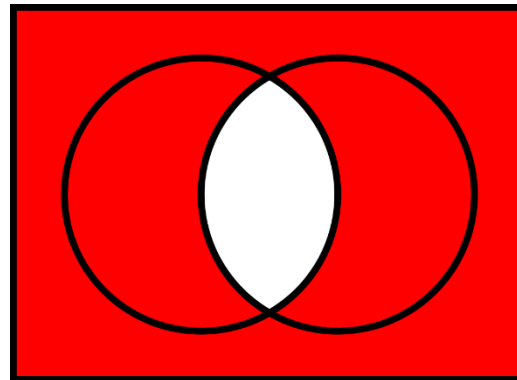
Es gibt keine Alternative

- Symbol: $|$ (NAND, auch \uparrow oder $\bar{\wedge}$)

- Bedeutung: Negation von Und (mind. eines ist falsch)

- Definition:

- | a | b | a b |
|---|---|-----|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |



Logical Operators (7)

- Nihilation (Peirce-Funktion)

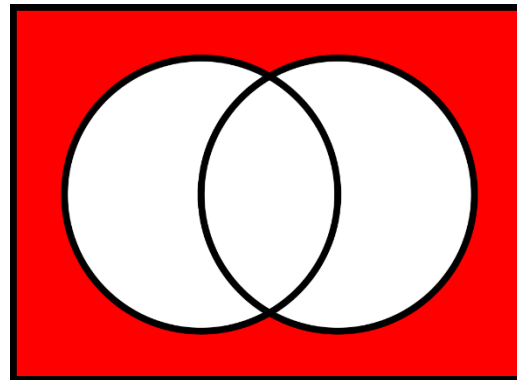
- Symbol: \downarrow (NOR, auch $\bar{\vee}$)

Nichts ist wahr

- Bedeutung: Negation von Oder (keines ist wahr)

- Definition:

- | a | b | $a \downarrow b$ |
|---|---|------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |



Gesetze der Logik (1)

- Doppelte Verneinung
 - Es ist nicht wahr, dass es nicht wahr ist
 - Es ist wahr
 - Als Formel ausgedrückt
 - $\neg(\neg a) \leftrightarrow a$
 - Beweis

a	$\neg a$	$\neg\neg a$
0	1	0
1	0	1



$$a \leftrightarrow \neg\neg a$$

Gesetze der Logik (2)

- De Morgansche Gesetze
 - Verneinung von Klammern
 - Nicht (A und B) *entspricht* nicht A oder nicht B
 - Nicht (A oder B) *entspricht* nicht A und nicht B
 - Als Formel ausgedrückt
 - $\neg(a \wedge b) \leftrightarrow \neg a \vee \neg b$
 - $\neg(a \vee b) \leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$

Gesetze der Logik (3)

- De Morgansche Gesetze (Fortsetzung)

- Beispiel

- Alle Zahlen, die nicht zwischen 1 und 5 liegen

– $\neg(n \geq 1 \wedge n \leq 5) \rightarrow \neg(n \geq 1) \vee \neg(n \leq 5) \rightarrow n < 1 \vee n > 5 \rightarrow \dots, -1, 0, 6, 7, \dots$

– $\neg(n \geq 1 \wedge n \leq 5) \rightarrow n \leq 1 \wedge n \geq 5 \rightarrow \emptyset \rightarrow$ Es gibt keine solchen Zahlen

Bitte gut merken!
Es ist wichtig!



NAND-Form

- Vollständige Sätze von logischen Operatoren
 - NICHT, UND, ODER (NOT, AND, OR)
 - NAND (oder NOR)
 - Nur ein Operator! (außerdem leicht in Silizium zu machen)
- Umwandlung
 - $\neg A \rightarrow A|A$
 - $A \wedge B \rightarrow (A|B)|(A|B)$
 - $A \vee B \rightarrow (A|A)|(B|B)$

